Модели учета гравитационных сил на движение КА

К гравитационным силам, действующим на движение космического аппарата, относятся:

- Ньютоновское притяжение Земли
- Ньютоновское притяжение Луны, Солнца и других тел Солнечной системы
- Силы от релятивистских поправок

Геопотенциал

Гравитационное поле представляется в виде ряда функций $V_{n,m}$ с коэффициентами $C_{n,m}$ при вещественной части и $S_{n,m}$ при мнимой части:

$$U = \mu Re\left(\sum_{n=0}^{\infty} R^n \sum_{m=0}^{n} \left(C_{n,m} - i\, S_{n,m}\right) V_{n,m}\right),$$

где μ – гравитационный параметр тела, R – радиус тела, Re обозначает вещественную часть, а i – мнимую единицу.

Функции $V_{n,m}$ определены через присоединенные функции Лежандра P_n^m:

$$V_{n,m} = \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\sin\varphi)(\cos m\lambda + i \sin m\lambda)$$

где (r, λ, φ) – сферические координаты искомой точки:

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda$$

$$y = r\cos\varphi\sin\lambda$$

$$z = r\sin\varphi$$

В современных разложениях гравитационного потенциала используются нормированные коэффициенты $\bar{C}_{n,m}$ и $\bar{S}_{n,m}$, связанные с $C_{n,m}$ и $S_{n,m}$ следующими соотношениями:

$$C_{n,m} = \bar{C}_{n,m} N_{n,m}$$

$$S_{n,m} = \bar{S}_{n,m} N_{n,m}$$

где

$$\begin{cases} N_{n,0} = \sqrt{2n+1},\ n \geq 0 \\ N_{n,m} = \sqrt{\frac{2(n-m)!(2n+1)}{(n+m)!}},\ n \geq m > 0 \end{cases}$$

Введя обозначение

$$\tilde{V}_{n,m} = V_{n,m} N_{n,m},$$

получаем

$$U = \mu \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} R^n \sum_{m=0}^{n} \left(\bar{C}_{n,m} - i\, \bar{S}_{n,m}\right) \tilde{V}_{n,m}\right)$$

Для вычисления $\tilde{V}_{n,m}$ используются рекуррентные соотношения :

$$\tilde{V}_{0,0} = \frac{1}{r}$$

$$\tilde{V}_{1,0} = \sqrt{3}\frac{z}{r^3}$$

$$\tilde{V}_{1,1} = \sqrt{3}\frac{x+iy}{r^3}$$

$$\tilde{V}_{n,n} = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\tilde{V}_{n-1,n-1}\frac{(x+iy)}{r^2},\ n > 1$$

$$\tilde{V}_{n,n-1} = \sqrt{2n+1}\tilde{V}_{n-1,n-1}\frac{z}{r^2},\ n > 1$$

$$\tilde{V}_{n,m} = \sqrt{\frac{(2n-1)(2n+1)}{(n-m)(n+m)}}\tilde{V}_{n-1,m}\frac{z}{r^2} + \sqrt{\frac{(n+m-1)(n-m-1)(2n+1)}{(n-m)(n+m)(2n-3)}}\tilde{V}_{n-2,m}\frac{1}{r^2},\ n > m > 1$$

Производные потенциала по координатам *x*,*y*,*z* выражаются через производные от $\tilde{V}_{n,m}$:

$$\frac{\partial U}{\partial\{x,y,z\}} = \sum_{n=0}^{\infty} R^n \sum_{m=0}^{n}\left(\bar{C}_{n,m}\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\tilde{V}_{n,m}}{\partial\{x,y,z\}}\right) + \bar{S}_{n,m}\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\tilde{V}_{n,m}}{\partial\{x,y,z\}}\right)\right)$$

Для вычисления производных от $\tilde{V}_{n,m}$ применяются следующие рекуррентные соотношения:

$$\frac{\partial\tilde{V}_{n,0}}{\partial x} = \mathrm{Re}(\tilde{V}_{n+1,1})\sqrt{\frac{2(2n+1)(n+1)(n+2)}{2n+3}}$$

$$\frac{\partial\tilde{V}_{n,1}}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\tilde{V}_{n+1,0}\sqrt{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{2n+3}} - \tilde{V}_{n+1,m+1}\sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+3)}{2n+3}}\right)$$

$$\frac{\partial\tilde{V}_{n,m}}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\tilde{V}_{n+1,m-1}\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m+1)(n-m+2)}{2n+3}} - \tilde{V}_{n+1,m+1}\sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+1)(n+m+2)}{2n+3}}\right), m > 1$$

$$\frac{\partial\tilde{V}_{n,0}}{\partial y} = i\,\mathrm{Im}(\tilde{V}_{n+1,1})\sqrt{\frac{2(2n+1)(n+1)(n+2)}{2n+3}}$$

$$\frac{\partial\tilde{V}_{n,1}}{\partial y} = \frac{i}{2}\left(\tilde{V}_{n+1,m-1}\sqrt{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{2n+3}} + \tilde{V}_{n+1,m+1}\sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+3)}{2n+3}}\right)$$

$$\frac{\partial\tilde{V}_{n,m}}{\partial y} = \frac{i}{2}\left(\tilde{V}_{n+1,m-1}\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m+1)(n-m+2)}{2n+3}} + \tilde{V}_{n+1,m+1}\sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+1)(n+m+2)}{2n+3}}\right), m > 1$$

$$\frac{\partial\tilde{V}_{n,m}}{\partial z} = \tilde{V}_{n+1,m}\sqrt{\frac{2(2n+1)(n+1)(n+2)}{2n+3}}$$

Учет вариаций геопотенциала.

Прежде чем производить суммирование гармоник для вычисления геопотенциала, необходимо вычислить актуальные значения коэффициентов разложения. Это вычисление проходит в несколько этапов, согласно рекомендациям IERS:

1) Чтение коэффициентов базовой модели статической модели геопотенциала (например, EGM2008, в которой заданы значения этих параметров и коэффициенты до степени 2190 и порядка 2159).

2) Замена некоторых коэффициентов низких гармоник на значения с учетом вековых изменений согласно рекомендациям IERS для конвенциональной модели геопотенциала.

3) Вычисление коррекций коэффициентов, обусловленных твердотельными приливными деформациями.

4) Вычисление коррекций коэффициентов, обусловленных океаническими приливными деформациями.

5) Вычисление коррекций коэффициентов, обусловленных твердотельным полюсным приливом.

6) Вычисление коррекций коэффициентов, обусловленных океаническим полюсным приливом.

Примечания:

1 Коррекции 2-6 для коэффициентов необходимо вычислить на каждую эпоху, в которой в дальнейшем предполагается вычисление значения геопотенциала и его производных.

2 Для задач расчета движения искусственных спутников и Луны не требуется учет всех гармоник. Согласно рекомендациям IERS, для навигационных спутников ограничиваются рассмотрением гармоник до степени и порядка 12, для Луны – 6. Для геодезических спутников – 24.

Вековые изменения низких гармоник

Учет изменений со временем некоторых коэффициентов гармоник низких степеней согласно моделям океанических и океанических полюсных приливов и моделей движения и взаимодействия океана и атмосферы для зональных гармоник:

$$\bar{C}_{n0}(t) = \bar{C}_{n0}(t) + d\bar{C}_{n0}/dt \times (t - t_0), n = 2,3,4,$$

где t_0 – эпоха J2000.0, а значения $\bar{C}_{n0}$ на эту эпоху и их скорость их годового изменения $d\bar{C}_{n0}/dt$ задаются согласно таблице 18:

Таблица 1 – Коэффициенты низких степеней условной модели геопотенциала

$\bar{C}_{20}$	-0.48416948×10^{-3}	$d\bar{C}_{20}/dt$	11.6 × 10^{-12}
$\bar{C}_{30}$	0.9571612×10^{-6}	$d\bar{C}_{30}/dt$	4.9 × 10^{-12}
$\bar{C}_{40}$	0.5399659×10^{-6}	$d\bar{C}_{40}/dt$	4.7 × 10^{-12}

Коэффициенты, описывающие ось фигуры Земли, вычисляются по следующим формулам:

$$\bar{C}_{21}(t) = \sqrt{3}\bar{x}_p(t)\bar{C}_{20} - \bar{x}_p\bar{C}_{22} + \bar{y}_p\bar{S}_{22}$$

$$\bar{S}_{21}(t) = -\sqrt{3}\bar{y}_p(t)\bar{C}_{20} - \bar{y}_p\bar{C}_{22} - \bar{x}_p\bar{S}_{22}$$

где $\bar{y}_p$ и $\bar{x}_p$ представляют условный средний земной полюс

$$\overline{x_p}(t) = \sum_{i=0}^{3}(t - t_0)^i \times \overline{x_p}^i$$

$$\overline{y_p}(t) = \sum_{i=0}^{3}(t - t_0)^i \times \overline{y_p}^i$$

где t — астрономическая эпоха, t_0 — эпоха 2000.0, а коэффициенты $\overline{x_p}^i$ и $\overline{y_p}^i$ даны в таблице 19:

Таблица 2 – Коэффициенты среднего полюса

	До 2010.0		**После 2010.0**	
i	$\overline{\mathbf{x_p}}^{\mathbf{i}}$ **[μс дуги в год]**	$\overline{\mathbf{y_p}}^{\mathbf{i}}$ **[μс дуги в год]**	$\overline{\mathbf{x_p}}^{\mathbf{i}}$ **[μс дуги в год]**	$\overline{\mathbf{y_p}}^{\mathbf{i}}$ **[μс дуги в год]**
0	55.974	346.346	23.513	358.891
1	1.8243	1.7896	7.6141	-0.6287
2	0.18413	-0.10729	0.0	0.0
3	0.007024	-0.000908	0.0	0.0

Твердотельные приливные деформации.

Вариации коэффициентов гравитационного поля Земли от твердотельных приливов вычисляются в два этапа. На первом этапе числа Лява k_{lm}, характеризующие неупругие свойства Земли, предполагаются частотно-независимыми и изменения коэффициентов вычисляются как функции положений приливообразующих тел (Луны и Солнца):

$$\Delta\overline{C}_{lm} - j\Delta\overline{S}_{lm} = \frac{k_{lm}}{2l+1}\sum_{n=2}^{3}\frac{GM_n}{GM}\left(\frac{a_e}{r_n}\right)^{l+1}\overline{P}_{lm}(sin\phi_n)e^{-jm\lambda_n}$$

где $j = \sqrt{-1}, GM_n$ – произведение гравитационной постоянной на массу Луны ($n = 2$) и Солнца ($n = 3$); r_n, ϕ_n, λ_n – сферические координаты Луны ($n = 2$) и Солнца ($n = 3$); $k_{lm} = k_{lm}^R + jk_{lm}^I$ – комплексная форма чисел Лява для учета неупругих свойств Земли.

Для вычисления используются значения амплитуд для 21 долгопериодической волны, 48 суточных волн и 2 полусуточных, приведенные в Соглашениях IERS 2010 в таблицах 6.5a, 6.5b и 6.5c. Для чисел Лява используются значения из таблицы 6.3 Соглашений.

На втором этапе определяются поправки за эффект зависимости чисел Лява от частоты по формуле:

$$\Delta\overline{C}_{lm}^F - j\Delta\overline{S}_{lm}^F = A_m \sum_s \delta k_{s(lm)} H_s \begin{pmatrix} -1 \\ j \end{pmatrix}_{l+m,\text{нечетн}}^{l+m,\text{четн}} e^{j\theta_s}$$

$$A_m = \frac{(-1)^m}{a_e\sqrt{4\pi(2-\delta_{0m})}}$$

$\delta k_{s(lm)} = k_{s(lm)} - k_{lm}$ – разности между частотно-зависимыми числами Лява и номинальными, использованными на первом этапе; H_s — амплитуда (в метрах) приливного члена s в гармоническом разложении приливообразующего потенциала; δ_s– аргумент приливной волны, который определяется линейной комбинацией фундаментальных аргументов Делоне:

$$\theta_s = m(\theta_g + \pi) - NF$$

где θ_g – Гринвичское звездное время; N–пятикомпонентный вектор множителей при фундаментальных аргументах Делоне; $F(l, l', F, D, \Omega_L)$ – вектор, компонентами которого являются фундаментальные аргументы Делоне (l– средняя аномалия Луны, l'– средняя аномалия Солнца, F – средняя долгота Луны, – средняя элонгация Луны от Солнца,Ω_L – средняя долгота восходящего узла Луны):

$$l = 134°.963\,402\,51 + 1\,717\,915\,923.2178\,t + 31.879\,2\,t^2 + 0''.051\,635\,t^3 - 0''.000\,244\,70\,t^4$$

$$l' = 357°.529\,109\,18 + 129\,596\,581.0481''\,t - 0''.553\,2\,t^2 - 0''.000\,136\,t^3 - 0''.000\,011\,49\,t^4$$

$$F = 93°.272\,090\,62 + 1\,739\,527\,262.8478t - 12.751\,2\,t^2 - 0.001\,037t^3 + 0.000\,004\,17\,t^4$$

$$D = 297°.850\,195\,47 + 1\,602\,961\,601.2090''\,t - 6''.370\,6\,t^2 + 0''.006\,593\,t^3 - 0''.000\,031\,69\,t^4$$

$$\Omega = 125°.044\,555\,01 - 6\,962\,890.543\,1''\,t + 7''.472\,2\,t^2 + 0''.007\,702\,t^3 - 0''.000\,059\,39\,t^4$$

$$\theta_g + \pi = (67310.54841 + (876600 \cdot 3600 + 8640184.812866)t + 0.093104\,t^2 - 6 \times 10^{-6} t^3)15 + 648000.0$$

При заданном уровне точности для частотно-зависимых поправок, порядка 10^{-12}, производится отбор приливных волн с учетом их амплитуд H_s.

Океанический прилив

Учет влияния океанических приливов выполняется с помощью глобальной модели океанических приливов FES2004, которая представлена в виде разложений ряда прямых («+» – в направлении на восток) и обратных («–» – в направлении на запад) амплитуд, $C^{\pm}{}_{f,nm}$ и фаз $S^{\pm}{}_{f,nm}$ приливных волн *f*.

Поправки к нормированным коэффициентам вычисляются по формулам:

$$\Delta\bar{C}_{nm}^{OT} = \sum_{f(n,m)} \left[\left(\bar{C}_{f,nm}^{+} + \bar{C}_{f,nm}^{-} \right) cos\theta_f(t) + \left(\bar{S}_{f,nm}^{+} + \bar{S}_{f,nm}^{-} \right) sin\theta_f(t) \right]$$

$$\Delta\bar{S}_{nm}^{OT} = \sum_{f(n,m)} \left[\left(\bar{S}_{f,nm}^{+} - \bar{S}_{f,nm}^{-} \right) cos\theta_f(t) - \left(\bar{C}_{f,nm}^{+} - \bar{C}_{f,nm}^{-} \right) sin\theta_f(t) \right]$$

где $\bar{C}_{f,nm}^{\pm}$ и $\bar{S}_{f,nm}^{\pm}$ – гармонические амплитуды приливных волн, определяемые как:

$$\bar{C}_{f,nm}^{\pm} = \frac{4\pi G \rho_w}{g_E} \left(\frac{1+k'_n}{2n+1} \right) \bar{C}_{f,nm}^{\pm} sin(\varepsilon_{f,nm}^{\pm} + \chi_f)$$

$$\bar{S}_{f,nm}^{\pm} = \frac{4\pi G \rho_w}{g_E} \left(\frac{1+k'_n}{2n+1} \right) \bar{C}_{f,nm}^{\pm} cos(\varepsilon_{f,nm}^{\pm} + \chi_f)$$

где G – гравитационная постоянная; ρ_w – плотность морской воды; g_E – среднее значение силы тяжести н а экваторе; k'_n – коэффициент нагрузочной деформации степени n; χ_f – значения фазового смещения в зависимости от типа волны и ее амплитуды. Значения фазовых смещений χ_f приведены в таблице 20.

Как и для твердотельных коррекций, аргументы θ_f выражаются через линейные комбинации фундаментальных аргументов Делоне F_j: $\theta_f = m(GMST + \pi) - \sum_{j=1}^{5} n_j F_j$

Таблица 3 – Значения фазового смещения χ_f

Тип волны	$\boldsymbol{H_f > 0}$	$\boldsymbol{H_f < 0}$
$n_1 = 0$, долгопериодические волны	π	0
$n_1 = 1$, суточные волны	$\pi/2$	$-\pi/2$
$n_1 = 2$, полусуточные волны	0	π

Значения коэффициентов разложения приливной модели содержатся в файле *fes2004_Cnm-Snm.dat*.

Твердотельный полюсной прилив

Возмущения во внешнем гравитационном потенциале вследствие деформации, создаваемой твердым полюсным приливом, эквивалентны поправкам к коэффициентам геопотенциала второй степени первого порядка, которые представляются следующим образом:

$$\Delta\bar{C}_{21}^{SPT} = -\sqrt{\frac{3}{5}}\frac{\Omega_E^2 R_E^3}{3GM_E}(k_2^{Re}m_1 + k_2^{Im}m_2)$$

$$\Delta\bar{S}_{21}^{SPT} = -\sqrt{\frac{3}{5}}\frac{\Omega_E^2 R_E^3}{3GM_E}(k_2^{Re}m_2 - k_2^{Im}m_1)$$

где – средняя угловая скорость вращения Земли, $k2$ – комплексное число Лява, $m_1 = x_p - \bar{x}_p$, $m_2 = -(y_p - \bar{y}_p)$ – угловые отклонения мгновенного вектора вращения от главной оси инерции , (x_p, y_p) и $(\bar{x}_p, \bar{y}_p)$ – координаты мгновенного и среднего полюсов, соответственно. Вычисление $(\bar{x}_p, \bar{y}_p)$ происходит аналогично формулам в описании вековых изменений низких гармоник геопотенциала. Итоговые формулы расчета поправок коэффициентов после подстановки:

$$\Delta\bar{C}_{21}^{SPT} = -1{,}333 \times 10^{-9}(m_1 + 0{,}0115m_2)$$

$$\Delta\bar{S}_{21}^{SPT} = -1{,}333 \times 10^{-9}(m_2 - 0{,}0115m_1)$$

Океанический полюсной прилив

Малость эффекта океанического полюсного прилива позволяет использовать для вычисления следующие выражения для поправок коэффициентов:

$$\Delta\bar{C}_{21}^{OPT} = -2{,}177 \times 10^{-10}(m_1 - 0{,}0172m_2)$$

$$\Delta\bar{S}_{21}^{OPT} = -1{,}723 \times 10^{-10}(m_2 - 0{,}0336m_1)$$

Релятивистские поправки

При высокоточной обработке необходимо учитывать эффекты общей теории относительности. Для движения космических аппаратов необходимо и достаточно учитывать поправки первого порядка в постньютоновском приближении в шварцшильдовской метрике.

Дополнительное ускорение в таком случае выражается следующим образом:

$$\boldsymbol{a}_{rel} = \frac{GMe}{c^2\, r^3} \left(4\, \frac{GMe}{r} - v^2\right) \boldsymbol{r} + 4\, (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}) \boldsymbol{v}$$

где GM_e- гравитационная константа Земли, c – скорость света в вакууме, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ – векторы положения и скорости, r и v – их нормы.

1.1.1.1 Влияние тел солнечной системы на движение КА

Учет прямого гравитационного влияния от тел Солнечной системы на движение КА вычисляется по закону тяготения Ньютона. Ускорения выражаются следующим образом:

$$\boldsymbol{a}_j = -\sum_j \frac{GM_j}{r_j{}^2} \boldsymbol{r}_j$$

где индекс j соответствует различным телам Солнечной системы. GM_j – гравитационная постоянная тела, $\mathbf{r}_j$ – вектор положения тела относительно положения спутника, r_j – норма этого вектора. Значения гравитационной постоянной и положения тел, а также методика вычисления положений на нужные эпохи, предоставляются наборами эфемерид тел Солнечной системы, например, EPM или DE.